Ортотреугольник. Педальный треугольник
Прямая Эйлера. Окружность девяти точек.

ЭМ и ПРМЗ, лекция 3

к.п.н., доц. Пырков Вячеслав Евгеньевич

План

1. Ортотреугольник и его свойства
2. Серединный треугольник и его свойства
3. Педальный треугольник и его свойства
4. Прямая Эйлера
5. Окружность девяти точек

Литература для самостоятельной работы

- ✓ ***Зетель С.И.*** Новая геометрия треугольника. – М., 1962.
- ✓ ***Ефремов Д.*** Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1903.
- ✓ ***Коксетер Г., Грейтцер С.*** Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

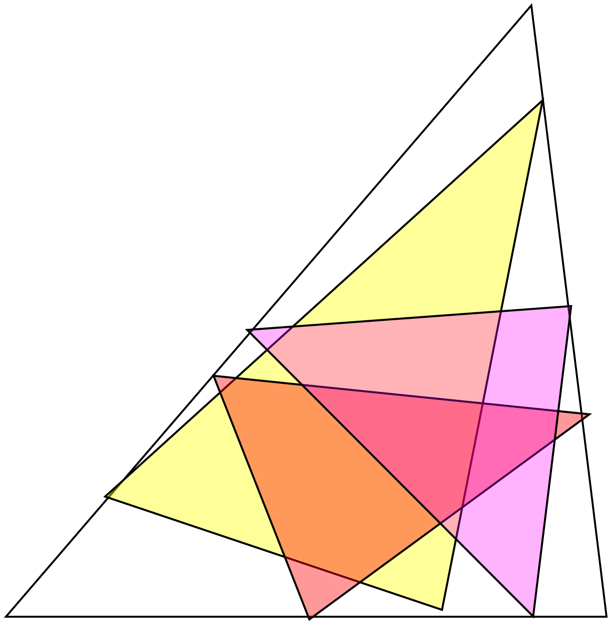
1. Ортотреугольник и его свойства

Италия, начало XVIII века

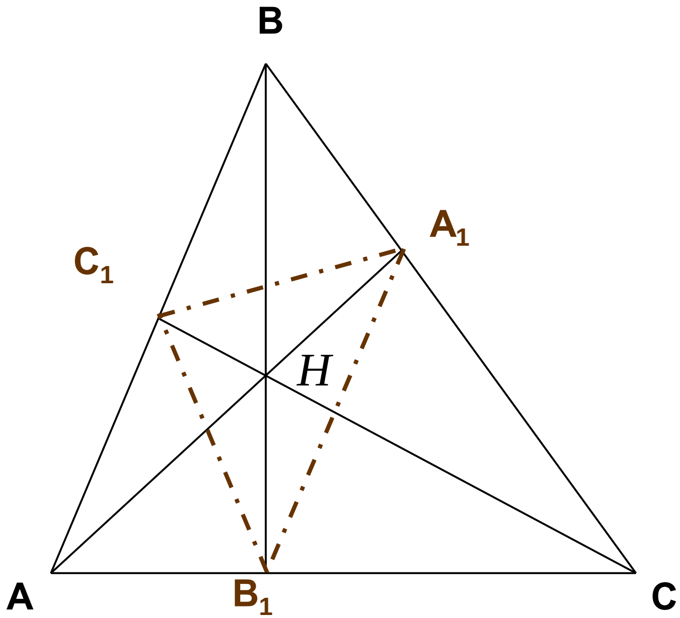
Инженер и математик Фаньяно Дей Тоски (1682—1766)

Задача: вписать в данный остроугольный треугольник *ABC* треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника *ABC* лежала одна вершина треугольника.

Существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра - **ортотреугольник.**



1. Ортотреугольник и его свойства



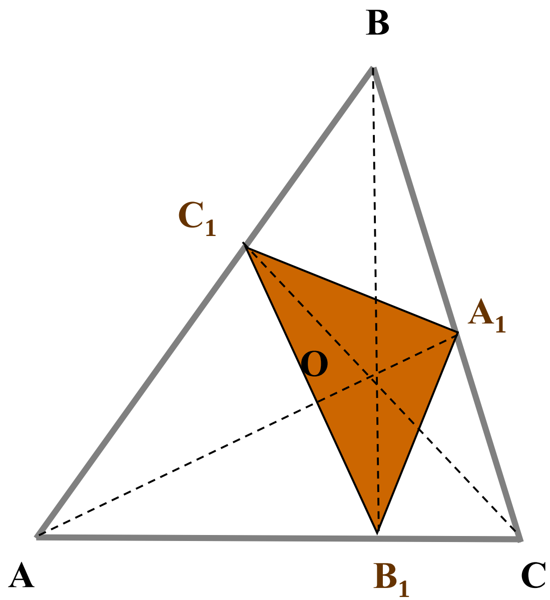
$\Delta ABC -$ *остроугольный*

$AA_1,\ BB_1,\ CC_1 -$ *высоты*

$\Delta A_1B_1C_1 -$ *ортотреугольник*

$H -$ *ортоцентр*

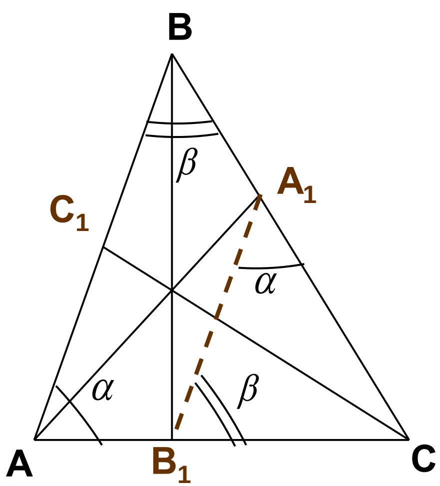
1. Ортотреугольник и его свойства



1. Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.
2. Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника.
3. Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.
4. Ортотреугольник – это треугольник с наименьшим периметром, который можно вписать в этот треугольник .
5. Периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты треугольника на синус угла, из которого она исходит.

1. Ортотреугольник и его свойства

Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.



$$\Delta ACB \Rightarrow \angle B_1A_1C = \alpha,. \angle A_1B_1C = \beta.$$

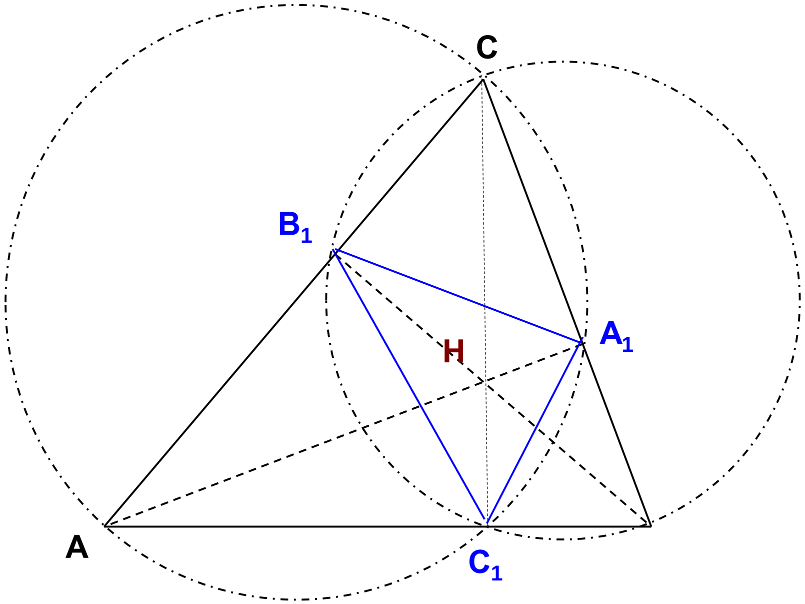
$$\left.\begin{array}{l} \angle C - общий \\ \angle AA_1C = \angle BB_1C \end{array}\right| \Rightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C \Rightarrow \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

$$\Rightarrow \Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1 = \alpha \\ \angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1 = \beta \end{array}\right.$$

$$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \alpha \\ \angle BC_1A = \angle C \end{array}\right.$$

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \angle AC_1B_1 = \angle C \\ \angle AB_1C_1 = \angle ABC = \beta \end{array}\right.$$

1. Ортотреугольник и его свойства



$$\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$$

$$\angle B_1BC = \angle CAA_1$$

$$\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$$

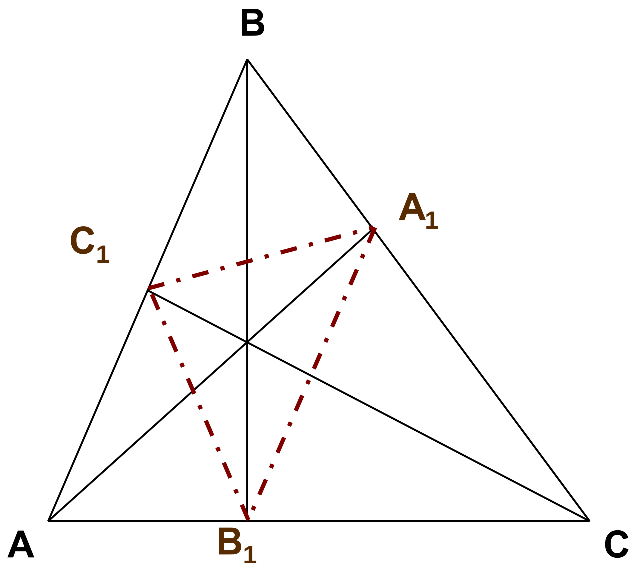
$$\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1 \Rightarrow$$

CC_1 – *биссектриса* $\angle B_1C_1A_1$;

AA_1 – *биссектриса* $\angle B_1A_1C_1$;

BB_1 – *биссектриса* $\angle A_1B_1C_1$.

1. Ортотреугольник и его свойства



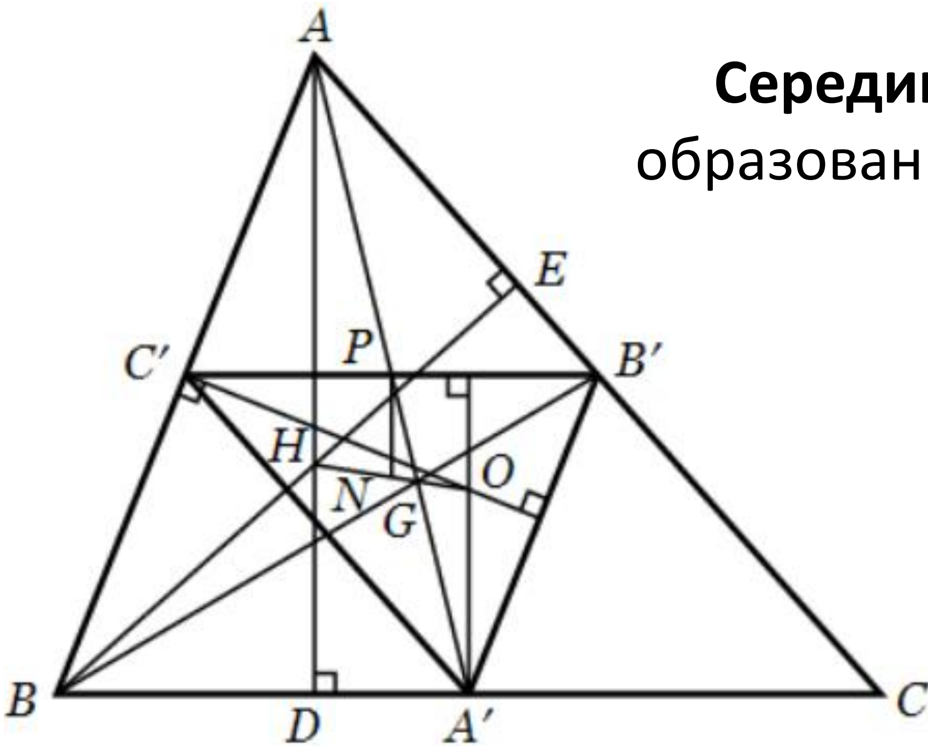
$$P_{A_1B_1C_1} = 2AA_1 \cdot \sin A$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2BB_1 \cdot \sin B$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 2CC_1 \cdot \sin C$$

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{2S_{ABC}}{R}$$

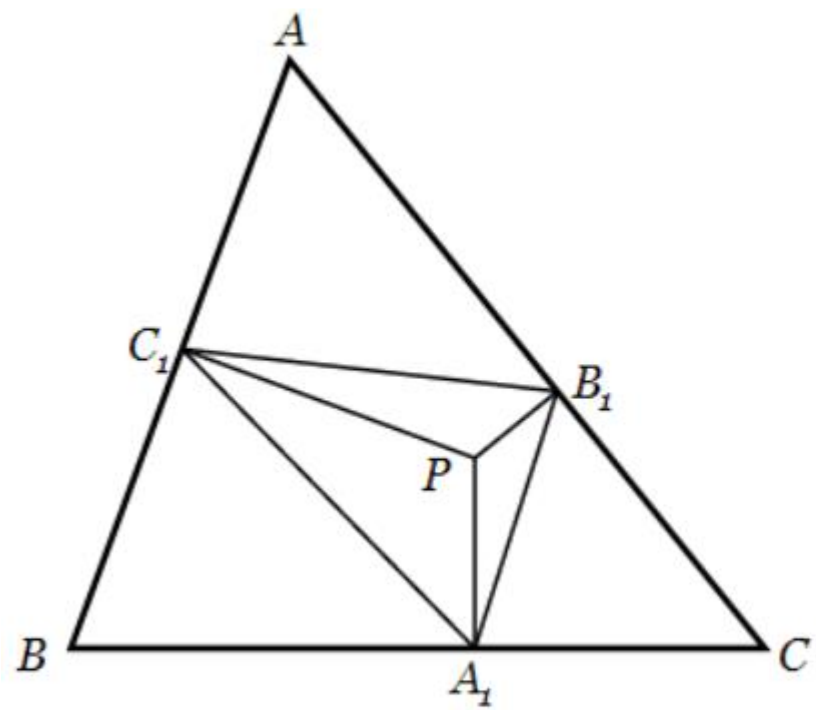
2. Серединный треугольник и его свойства



Серединный треугольник – треугольник, образованный из средних линий исходного треугольника.

Теорема. *Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой. Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении* 2 : 1.

3. Педальный треугольник и его свойства



$$\frac{|B_1C_1|}{\sin A} = |AP|, \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$|B_1C_1| = \frac{a|AP|}{2R}$$

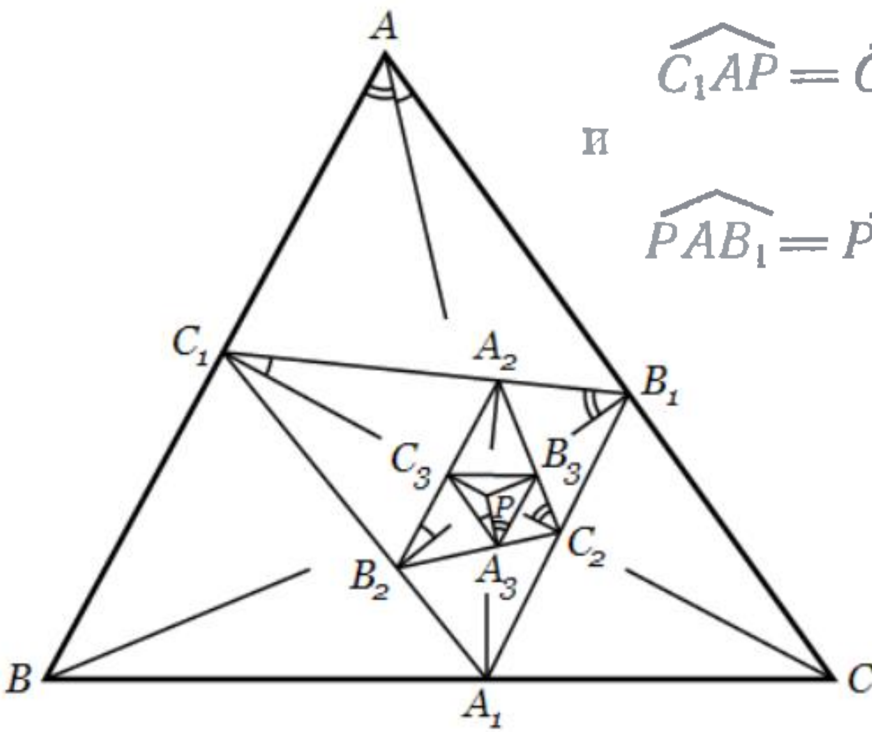
Аналогично:

$$|A_1C_1| = \frac{b|BP|}{2R} \qquad |B_1A_1| = \frac{c|CP|}{2R}$$

Теорема. *Если расстояния от педальной точки до вершин треугольника ABC равны x, y, z, то длины сторон педального треугольника равны* $\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R}$.

3. Педальный треугольник и его свойства

Теорема. *Третий педальный треугольник подобен исходному.*



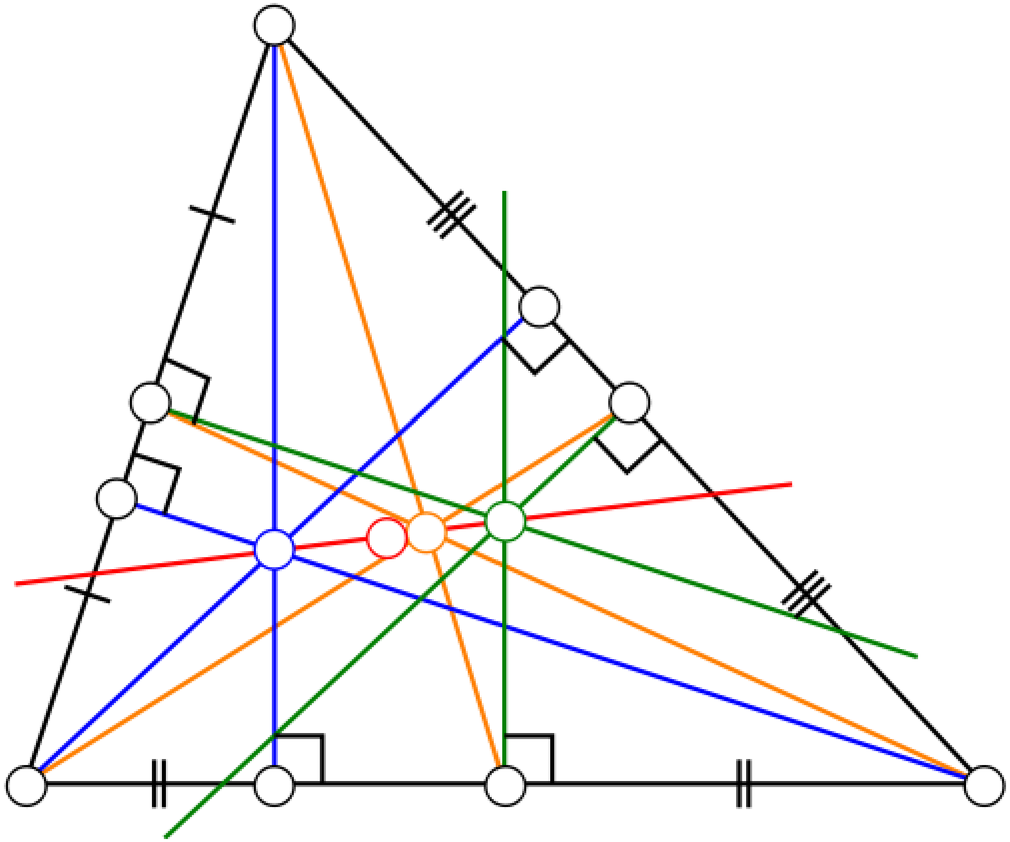
$$\widehat{C_1AP} = \widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P} = \widehat{B_3C_2P} = \widehat{B_3A_3P}$$

и

$$\widehat{PAB_1} = \widehat{PC_1B_1} = \widehat{PC_1A_2} = \widehat{PB_2A_2} = \widehat{PB_2C_3} = \widehat{PA_3C_3}.$$

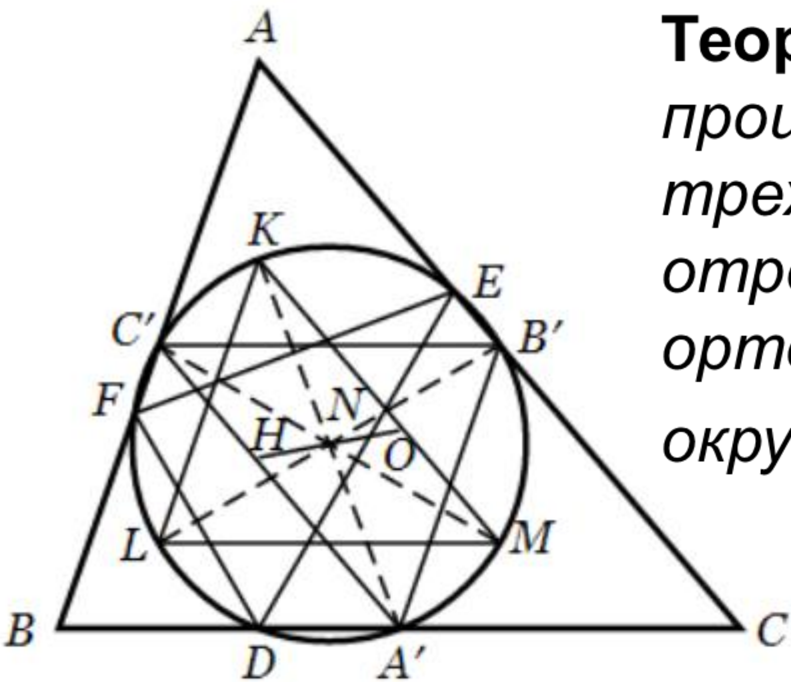
Теорема А Оппенгейма. *n-й педальный n-угольник любого n-угольника подобен первоначальному n-угольнику.*

4. Прямая Эйлера



Леонард Эйлер
(1707 - 1783)

5. Окружность девяти точек



Теорема. *Основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющие его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности радиуса* $\frac{1}{2}$R .

Теорема. *Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка между ортоцентром и центром описанной окружности.*